

Total No. of Questions : 9]
(2041)

[Total No. of Printed Pages

UG (CBCS) IIIrd Year (Annual) Examinati

2620

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Matrices)

(DSE-3A.1)

Paper : MATH301TH

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 70

Note :- Attempt *five* questions in all. Section-A (Question No. 1) is compulsory. Attempt *four* questions from Section-B, selecting *one* question each from the Units-I, II, III and IV. Marks are given against questions.

कुल पाँच प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड-अ (प्रश्न क्र. 1) अनिवार्य है। प्रत्येक इकाई I, II, III व IV से एक-एक प्रश्न का चयन करते हुए खण्ड-ब से चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। अंक प्रश्न के सामने दिए गए हैं।

Section-A (खण्ड-अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Define Orthogonal and Unitary Matrix.

ऑर्थोगोनल एवं एकात्मक मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिए।

CH-438

(1)

Turn Over

- (ii) Define consistent and inconsistent system of linear equations.

रेखीय समीकरण की संगत और असंगत प्रणाली को परिभाषित कीजिए।

- (iii) Define rank of a matrix.

मैट्रिक्स की रैंक को परिभाषित कीजिए।

- (iv) Determine the rank of matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ की रैंक निर्धारित कीजिए।

- (v) Define eigen-value and eigen-vectors of a matrix.

एक मैट्रिक्स की अभिलाक्षणिक मान एवं अभिलाक्षणिक सदिश को परिभाषित कीजिए।

- (vi) Define basis of a vector space.

सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define Dilation Mapping

फैलाव मानचित्रण को परिभाषित कीजिए।

(viii) Show that the transformation matrix T is a pure

rotation, where $T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

दर्शाइए कि परिवर्तन मैट्रिक्स T एक शुद्ध रोटेशन है जहाँ

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad 2 \times 8 = 16$$

Section-B (खण्ड-ब)

Unit-I (इकाई-I)

2. (a) If A is a Skew symmetric matrix and $(I + A)$ is non-singular, then show that $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ is orthogonal matrix.

यदि A एक विषम सममित आव्यूह है एवं $(I + A)$ व्युत्क्रमणीय हो तो सिद्ध कीजिए कि $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ एक लांबिक आव्यूह है।

(b) Using elementary transformation, find the rank

$$\text{of } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{एलीमेंटरी रूपान्तरण द्वारा } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ को}$$

रैंक ज्ञात कीजिए।

6/2,7

3. (a) Reduce the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ to normal form. Hence find rank.

मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ को नॉर्मल फॉर्म अपचयन कीजिए। रैंक भी ज्ञात कीजिए।

- (b) Show that $k = 6$ is the only real value for which the following equations have non-zero solution :

$$x + 2y + 3z = kx,$$

$$3x + y + 2z = ky,$$

$$2x + 3y + z = kz.$$

दर्शाइए कि $k = 6$, केवल एक वास्तविक मान है जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण का अशून्य हल हो :

$$x + 2y + 3z = kx,$$

$$3x + y + 2z = ky,$$

$$2x + 3y + z = kz$$

6½,7

Unit-II (इकाई-II)

4. (a) Find A^{-1} by using row elementary operation, if

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

पंक्ति एलिमेंटरी रूपान्तरण द्वारा A^{-1} ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ हो।}$$

(b) Diagonalize the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ को डाइगोनेलाइज कीजिए।

5. (a) Find the invariant points of the transformations defined by :

$$x' = 1 - 2y,$$

$$y' = 2x - 3$$

परिवर्तन $x' = 1 - 2y, y' = 2x - 3$ के अपरिवर्तनीय बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(b) Show that the following equations are consistent. Hence find the solution :

$$x - y + z = 5,$$

$$2x + y - z = -2,$$

$$3x - y - z = 7$$

दर्शाइए कि निम्नलिखित समीकरण संगत हैं। इसको हल भी कीजिए :

$$x - y + z = 5,$$

$$2x + y - z = -2,$$

$$3x - y - z = 7$$

6/2,7

Unit-III (इकाई-III)

6. (a) Prove that a non-empty subset W of a space $V(F)$ is a subspace of V iff W is closed under addition and scalar multiplication.

सिद्ध कीजिए कि एक वैक्टर स्पेस $V(F)$ का अरिक्त सबसेट W , V का सब-स्पेस है यदि और केवल यदि W का योग तथा गुणा के अन्तर्गत परिबद्ध है।

- (b) Let R be the field of reals and V be the set of vectors in a plane. Show that $V(R)$ is vector-space with vector addition as internal binary

माना R वास्तविक का क्षेत्र है और V प्लेन में वेक्टर का समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि $V(R)$ वेक्टर बाइनरी के साथ सदिश स्थान है, जो आन्तरिक बाइनरी संरचना और R के तत्वों के स्केलर गुणन के साथ बाहरी बाइनरी रचना के रूप में V का है।

6½,7

7. (a) For what value of k will the vector $V = (1, k, -4)$ be a linear combination of $V_1 = (1, -3, 2)$ and $V_2 = (2, -1, 1)$.

k के किस मान के लिए वेक्टर $V = (1, k, -4)$, $V_1 = (1, -3, 2)$ और $V_2 = (2, -1, 1)$ का रैखिक संयोजन होगा।

b. prove that $b = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$ is a basis of R^4 and determine the co-ordinate of $(2, 3, 4, -1)$ relative to ordered basis B.

सिद्ध कीजिए कि $B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$, R^4 का एक आधार है और ऑर्डर आधार B के लिए $(2, 3, 4, -1)$ के समन्वय का निर्धारण कीजिए। 6½,7

Unit-IV (इकाई-IV)

8. (a) Determine the eigen-value and eigen-vector of

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ के अभिलाक्षणिक मान एवं अभिलाक्षणिक}$$

सदिश ज्ञात कीजिए।

(b) Let $T : R^3 \rightarrow R^2$ be defined by :

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y - z \\ 2x - y + z \end{bmatrix}$$

then find the matrix associated with this linear transformation.

यदि $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ को $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y - z \\ 2x - y + z \end{bmatrix}$ द्वारा

परिभाषित किया गया है, तो उनके रूपान्तरण से जुड़े मैट्रिक्स को ज्ञात कीजिए। 6½,7

9. (a) Find a matrix representation for counter-clockwise rotation of the plane about origin through 90° .

90° डिग्री के लिए उत्पत्ति के बारे में प्लेन के काउंटर-क्लॉक वाइज रोटेशन के लिए मैट्रिक्स को ज्ञात कीजिए।

- (b) Let $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the projection onto the X-axis. Find the eigen-values and corresponding eigen-vectors of T.

माना $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, X-अक्ष पर प्रक्षेपण है। T के अभिलाक्षणिक मान तथा इसके साथ जुड़े अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए। 6½,7